

Endogeneidade no Modelo Probit: A Falha Mecânica do Gradiente

1 O Modelo e o Estimador

O modelo probit parte da variável latente

$$y_i^* = x_i' \beta + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \mid x_i \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

e observamos apenas $y_i = \mathbf{1}[y_i^* > 0]$. Sob a hipótese de exogeneidade, a probabilidade de sucesso condicional é

$$P(y_i = 1 \mid x_i) = \Phi(x_i' \beta),$$

onde Φ é a CDF da normal padrão. O MLE maximiza a log-verossimilhança

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^n \left[y_i \log \Phi(x_i' \beta) + (1 - y_i) \log (1 - \Phi(x_i' \beta)) \right].$$

2 A Condição de Momento do MLE

O gradiente de $\ell(\beta)$ em relação a β é

$$\nabla_{\beta} \ell(\beta) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{y_i - \Phi(x_i' \beta)}{\Phi(x_i' \beta)(1 - \Phi(x_i' \beta))}}_{\text{resíduo ponderado}} \cdot \phi(x_i' \beta) x_i,$$

onde $\phi = \Phi'$ é a PDF normal. Definindo o peso $w_i(\beta) = \phi(x_i' \beta) / [\Phi(x_i' \beta)(1 - \Phi(x_i' \beta))]$, a condição de primeira ordem é

$$\boxed{\sum_{i=1}^n w_i(\beta) [y_i - \Phi(x_i' \beta)] x_i = 0.}$$

Para que o verdadeiro β_0 resolva essa equação **em esperança**, precisamos

$$\mathbb{E} \left[w_i(\beta_0) (y_i - \Phi(x_i' \beta_0)) x_i \right] = 0.$$

Como $w_i > 0$ quase certamente, isso exige

$$\mathbb{E}[y_i - \Phi(x_i' \beta_0) \mid x_i] = 0 \iff \mathbb{E}[y_i \mid x_i] = \Phi(x_i' \beta_0).$$

3 Por Que a Condição Falha com Endogeneidade

Suponha que $x_i = (x_i^{\text{ex}}, x_i^k)$, onde x_i^k é endógena: $\text{Cov}(x_i^k, \varepsilon_i) = \sigma_{k\varepsilon} \neq 0$.

A distribuição condicional do erro *deixa de ser* $\mathcal{N}(0, 1)$. Especificamente, sob normalidade conjunta,

$$\varepsilon_i \mid x_i \sim \mathcal{N}(\gamma x_i^k, 1 - \gamma^2 \sigma_k^2), \quad \gamma = \frac{\sigma_{k\varepsilon}}{\sigma_k^2},$$

de modo que

$$\mathbb{E}[y_i \mid x_i] = P(\varepsilon_i > -x_i' \beta_0 \mid x_i) = \Phi\left(\frac{x_i' \beta_0 + \gamma x_i^k}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sigma_k^2}}\right) \neq \Phi(x_i' \beta_0).$$

Portanto, a esperança da condição de primeira ordem avaliada em β_0 é

$$\mathbb{E}\left[w_i(\beta_0) (y_i - \Phi(x_i' \beta_0)) x_i\right] = \mathbb{E}\left[w_i(\beta_0) \underbrace{\left(\Phi\left(\frac{x_i' \beta_0 + \gamma x_i^k}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sigma_k^2}}\right) - \Phi(x_i' \beta_0)\right)}_{\neq 0 \text{ quando } \gamma \neq 0} x_i\right] \neq 0.$$

O gradiente da log-verossimilhança **não é zero em** β_0 : o MLE converge para algum $\tilde{\beta} \neq \beta_0$, e o estimador é *inconsistente*.

4 Intuição Geométrica

	Modelo exógeno	Modelo endógeno
$\mathbb{E}[\varepsilon \mid x]$	0	$\gamma x^k \neq 0$
$\mathbb{E}[y_i \mid x_i]$	$\Phi(x_i' \beta_0)$	$\Phi\left(\frac{x_i' \beta_0 + \gamma x_i^k}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sigma_k^2}}\right)$
Gradiente em β_0	0	$\neq 0$
MLE	consistente	inconsistente

A falha não é de i.i.d., de regularidade, nem de identificação local. É uma falha de **especificação da verossimilhança**: o probit assume uma distribuição condicional $\mathcal{N}(0, 1)$ para $\varepsilon_i \mid x_i$ que simplesmente não vale quando há covariância não nula entre x_i^k e ε_i .

5 Correção: Bivariate Probit

A solução natural é modelar explicitamente a correlação. Define-se o sistema

$$\begin{aligned} y_i^* &= x_i' \beta + \varepsilon_{1i}, \\ x_i^k &= z_i' \pi + \varepsilon_{2i}, \end{aligned}$$

com $(\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}) \sim \mathcal{N}_2(0, \Sigma)$ e $\Sigma_{12} = \rho \neq 0$. A verossimilhança conjunta integra sobre a distribuição bivariada correta, e a condição de momento do MLE volta a ser satisfeita em β_0 , restaurando a consistência.